CHUYÊN ĐỀ BẤT ĐẲNG THỨC

I-CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC BẰNG PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG

Để chứng minh một bất đẳng thức bằng phương pháp tương đương, ta có thể làm theo 2 ý tưởng:

-Biến đổi BĐT cần chứng minh tương đương với một BĐT đã biết là luôn đúng.

-Sử dụng một BĐT đã biết, biến đổi để dẫn đến BĐT cần chứng minh.

Một số bất đẳng thức luôn đúng:

- $A^2 \geq 0.$
- $A^2 + B^2 \geq 0.$
- $A.B \geq 0$ với $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} A \geq 0 \\ B \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} A \leq 0 \\ B \leq \end{cases} \end{array}\right.$
- $A^2 + B^2 \geq 2AB.$
- $\mathrm{A}^2 + B^2 \geq -2AB$

Bài 1.Chứng minh các bất đẳng thức sau và cho biết dấu đẳng thức xảy ra khi nào ?

a) $(a+b)^2 \geq 4ab,\ \forall a;\ b \in \mathbb{R}.$

b) $2(a^2+b^2) \geq (a+b)^2,\ \forall a;\ b \in \mathbb{R}.$

c) $a+b+\dfrac{1}{2} \geq \sqrt{a}+\sqrt{b},\ \forall a;\ b \geq 0.$

d) $a+b+c+\dfrac{3}{4} \geq \sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c},\ \forall a;\ b;\ c \geq 0.$

e) $a^2+b^2+c^2+12 \geq 4(a+b+c),\ \forall a;\ b;\ c \in \mathbb{R}.$

f) $a^4 \pm a + 1 > 0,\ \forall a \in \mathbb{R}.$

g) $a^4+3 \geq 4a,\ \forall a \in \mathbb{R}.$

h) $a^2+b^2+4 \geq ab+2a+2b,\ \forall a;\ b;\ c \in \mathbb{R}.$

i) $\dfrac{a^2}{4}+b^2+c^2 \geq ab-ac+2bc,\ \forall a;\ b;\ c \in \mathbb{R}.$

j) $4a^4+5a^2 \geq 8a^3+2a-1,\ \forall a \in \mathbb{R}.$

k) $a^2(1+b^2)+b^2(1+c^2)+c^2(1+a^2) \geq 6abc.$

l) $a^4+b^4+c^2+1 \geq 2a(ab^2-a+c+1),\ \forall a,b,c.$

m) $x^2+y^2+5 > xy+x+3y,\ \ \forall x,\ y \in \mathbb{R}.$

n) $4a^2+4b^2+6a+3 \geq 4ab,\ \forall a;\ b \in \mathbb{R}.$

o) $x^2+2y^2+2xy-2x-5y+4 > 0,\ \forall x,\ y \in \mathbb{R}.$

p) $x^2+y^2+xy-3x-3y+3 \geq 0,\ \forall x;\ y \in \mathbb{R}.$

q) $x^2+y^2+xy-5x-4y+7 \geq 0,\ \forall x;\ y \in \mathbb{R}.$

r) $x^2+4y^2+3z^2+14 > 2x+12y+6z,\ \forall x,y,z.$

s) $x^2+y^2+1 \geq xy+x+y,\ \forall x;\ y \in \mathbb{R}.$

t) $x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx,\ \forall x,\ y,\ z \in \mathbb{R}.$

u) $x^4+y^4+z^4 \geq xyz(x+y+z),\ \forall x;\ y;\ z \in \mathbb{R}.$

v) $ab+2bc+3ca \leq 0,\ \forall : a+b+c=0.$

x) $\dfrac{a}{a^2+1}+\dfrac{5(a^2+1)}{2\mathrm{a}} \geq \dfrac{11}{2},\ \forall a > 0.$

y) $\dfrac{x^2}{y^2}+\dfrac{y^2}{x^2}+4 \geq 3\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right),\ \forall x \neq 0,\ y \neq 0.$

z) $a^3b^2+b^3c^2+c^3a^2 > a^2b^3+b^2c^3+c^2a^3,\ \forall a > b > c > 0.$

Bài 2. Chứng minh các ***bất đẳng thức phụ thường được sử dụng*** sau:

$a) a^3+b^3 \geq a^2b+ab^2 = ab(a+b),\ \forall a \geq 0;\ b \geq 0.$ Dấu đẳng thức xảy ra khi nào ?

$b) 4(a^3+b^3) \geq (a+b)^3,\ \forall a \geq 0,\ b \geq 0.$ Dấu đẳng thức xảy ra khi nào ?

$c) a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca,\ \forall a;\ b;\ c \in \mathbb{R}.$ Dấu đẳng thức xảy ra khi nào ?

$d) 3(a^2+b^2+c^2) \ge (a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ca),\ \forall a;\ b;\ c \in \mathbb{R}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi nào ?

e) $(a^2+b^2+c^2)^2 \ge (ab+bc+ca)^2 \ge 3abc(a+b+c),\ \forall a;\ b;\ c.$ Dấu đẳng thức xảy ra khi nào ?

$f) a^2+ab+b^2 \ge \dfrac{3}{4}(a+b)^2,\ \forall a;\ b \in \mathbb{R}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi nào ?

$g) \sqrt{a}+\sqrt{b} \ge \sqrt{a+b},\ \forall a \ge 0;\ b \ge 0.$ Dấu đẳng thức xảy ra khi nào ?

$h) \sqrt{1+a}+\sqrt{1+b} \ge 1+\sqrt{1+a+b},\ \forall a \ge 0;\ b \ge 0.$ Dấu đẳng thức xảy ra khi nào ?

$i) \dfrac{a^3}{a^2+ab+b^2} \ge \dfrac{2a-b}{3},\ \forall a > 0;\ b > 0.$ Dấu đẳng thức xảy ra khi nào ?

$k) a^4+b^4 \ge a^3b+ab^3 = ab(a^2+b^2),\ \forall a;\ b;\ c \in \mathbb{R}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi nào ?

$l) \dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{1}{1+y^2} \ge \dfrac{2}{1+xy},\ \forall xy \ge 1.$ Dấu đẳng thức xảy ra khi nào ?

$m) \dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{1}{1+y^2} \le \dfrac{2}{1+xy},\ \forall xy \le 1.$ Dấu đẳng thức xảy ra khi nào ?

$n) \dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1+y} \ge \dfrac{2}{1+\sqrt{xy}},\ \forall: xy \ge 1.$ Dấu đẳng thức xảy ra khi nào ?

$0) \dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1+y} \le \dfrac{2}{1+\sqrt{xy}},\ \forall: xy \le 1.$ Dấu đẳng thức xảy ra khi nào ?

$p) \dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{1}{1+y^2}+\dfrac{1}{1+z^2} \ge \dfrac{3}{1+xyz},\ \forall x \ge 1;\ y \ge 1;\ z \ge 1.$ Dấu đẳng thức xảy ra khi nào ?

$q) \dfrac{1}{(1+x)^2}+\dfrac{1}{(1+y)^2} \ge \dfrac{1}{1+xy},\ \forall: \begin{cases} x \ge 1 \\ y \ge 1 \end{cases}\cdot$ Dấu đẳng thức xảy ra khi nào ?

$u) \left(\dfrac{1}{a}-1\right)\left(\dfrac{1}{b}-1\right) \ge \left(\dfrac{2}{a+b}-1\right)^2,\ \forall: \begin{cases} a > 0;\ b > 0 \\ a+b < 1 \end{cases}\cdot$ Dấu đẳng thức xảy ra khi nào ?

Bài 3.Cho $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Chứng minh rằng $a^2+b^2 \ge 2ab$ (1). Áp dụng bất đẳng thức (1) để chứng minh các bất đẳng thức sau và cho biết dấu đẳng thức xảy ra khi nào ?

a) $(a^2+1)(b^2+1)(c^2+1) \ge 8abc.$

b) $(a^2+4)(b^2+4)(c^2+4)(d^2+4) \ge 256abcd.$

c) $a^4+b^4+c^4+d^4 \ge 4abcd.$

Bài 4.Cho $a, b, c \in \mathbb{R}$. Chứng minh bất đẳng thức: $a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca$ (2). Áp dụng bất đẳng thức (2) để chứng minh các bất đẳng thức sau và cho biết dấu đẳng thức xảy ra khi nào ?

a) $(a+b+c)^2 \le 3(a^2+b^2+c^2).$

b) $(a+b+c)^2 \ge 3(ab+bc+ca).$

c) $a^4+b^4+c^4 \ge abc(a+b+c).$

d) $a^4+b^4+c^4 \ge abc,\ (a+b+c=1).$

e) $\dfrac{a^2+b^2+c^2}{3} \ge \left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)^2$.

f) $\dfrac{a+b+c}{3} \ge \sqrt{\dfrac{ab+bc+ca}{3}}, \ \forall a,\ b,\ c>0.$

<u>Bài 5.</u>Cho $a,\ b\ge 0$. Chứng minh bất đẳng thức: $a^3+b^3 \ge a^2b+b^2a = ab(a+b)$ (3). Áp dụng bất đẳng thức (3) để chứng minh các bất đẳng thức sau và cho biết dấu đẳng thức xảy ra khi nào ?

$a)\dfrac{a^3+b^3}{ab}+\dfrac{b^3+c^3}{bc}+\dfrac{c^3+a^3}{ca} \ge 2(a+b+c),\ \forall a,\ b,\ c>0.$

$b)\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{c}+\dfrac{c^2}{a}+\dfrac{b^2}{a}+\dfrac{c^2}{b}+\dfrac{a^2}{c} \ge 2(a+b+c),\ \forall a>0,\ b>0.$

$c)\dfrac{1}{a^3+b^3+abc}+\dfrac{1}{b^3+c^3+abc}+\dfrac{1}{c^3+a^3+abc} \le \dfrac{1}{abc},\ \forall a,\ b,\ c>0.$

$d)\dfrac{1}{a^3+b^3+1}+\dfrac{1}{b^3+c^3+1}+\dfrac{1}{c^3+a^3+1} \le 1,\ \forall : \begin{cases} a,\ b,\ c>0 \\ abc=1 \end{cases}.$

$e)\dfrac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\dfrac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\dfrac{c^3}{c^2+ac+a^2} \ge \dfrac{a+b+c}{3},\ \forall a,\ b,\ c>0.$

$f)\dfrac{1}{a^3+abc+b^3}+\dfrac{1}{b^3+abc+c^3}+\dfrac{1}{a^2+abc+c^2} \le \dfrac{1}{abc},\ \forall a,\ b,\ c>0.$

$g)\dfrac{1}{a+b+1}+\dfrac{1}{b+c+1}+\dfrac{1}{c+a+1} \le 1,\ \forall : \begin{cases} a,\ b,\ c>0 \\ abc=1 \end{cases}.$

$h)\dfrac{5b^3-a^3}{ab+3b^2}+\dfrac{5c^3-b^3}{cb+3c^2}+\dfrac{5a^3-c^3}{ac+3a^2} \le a+b+c,\ \forall a,\ b,\ c>0.$

$i)\dfrac{19b^3-a^3}{ab+5b^2}+\dfrac{19c^3-b^3}{bc+5c^2}+\dfrac{19a^3-c^3}{ca+5a^2} \le 3(a+b+c).$

$k)\sqrt[3]{4(a^3+b^3)}+\sqrt[3]{4(b^3+c^3)}+\sqrt[3]{4(c^3+a^3)} \ge 2(a+b+c),\ \forall a,\ b,\ c\ge 0.$

<u>Bài 6</u>.Cho $a,\ b,\ x,\ y \in \mathbb{R}$. Chứng minh bất đẳng thức: $\sqrt{a^2+x^2}+\sqrt{b^2+y^2} \ge \sqrt{(a+b)^2+(x+y)^2}$ (4) (gọi là bất đẳng thức Mincốpxki). Áp dụng bất đẳng thức (4) để chứng minh các bất đẳng thức sau hoặc tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức P và cho biết dấu đẳng thức xảy ra khi nào ?

a)Chứng minh: $\sqrt{1+a^2}+\sqrt{1+b^2} \ge \sqrt{5},\ \forall a\ge 0;\ b\ge 0$ và $a+b=1.$

b)Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\sqrt{a^2+\dfrac{1}{b^2}}+\sqrt{b^2+\dfrac{1}{a^2}}$ với $\begin{cases} a\ne 0 \\ b\ne 0 \end{cases}.$

c)Chứng minh: $\sqrt{x^2+\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{y^2+\dfrac{1}{y^2}}+\sqrt{z^2+\dfrac{1}{z^2}} \ge \sqrt{82},\ \forall x,\ y,\ z>0$ và $x+y+z=1.$

d)Tìm giá trị nhỏ nhất của: $P=\sqrt{223+x^2}+\sqrt{223+y^2}+\sqrt{223+z^2}$ với $\begin{cases} x>0,\ y>0,\ z>0 \\ x+y+z=\sqrt{3} \end{cases}.$

Bài 7.Chứng minh các bất đẳng thức sau:

Đối với bài toán 2 biến đối xứng hoặc 3 biến đối xứng mà có điều kiện ràng buộc $x;\,y \in [a;b]$ *hoặc* $x;\,y;\,z \in [a;b]$ *thì các đánh giá* $\begin{cases}(x-a)(y-a)\ge 0\\(x-b)(y-b)\ge 0\\(x-a)(b-y)\le 0\\(x-a)(x-b)\le 0\\(y-a)(y-b)\le 0\end{cases}$ *hoặc* $\begin{cases}(x-a)(y-a)(z-a)\ge 0\\(x-b)(y-b)(z-b)\le 0\\\cdots\cdots\cdots\end{cases}$ *là rất chặt vì 1 trong 2 biến (hoặc 3 biến) bằng điểm biên thì có đẳng thức xảy ra.*

a)Cho $x, y \in [1;2]$ Chứng minh: $\dfrac{x+2y}{x^2+3y+5}+\dfrac{y+2x}{y^2+3x+5}\ge \dfrac{x+y}{x+y+1}\cdot$

b)Cho $a;\,b;\,c \in [1;3]$ và $a+b+c=6.$ Chứng minh: $11\le ab+bc+ca\le 12$ và $a^2+b^2+c^2\le 14.$

c)Cho $a,b,c\in[1,3]$ và $a+b+c=6.$ Chứng minh: $4(a^3+c^3)+13b^2+5\le 13(a^2+b^2+c^2-1).$

d)Cho $a,b,c\in[1,3]$ và $a+b+c=6.$ Chứng minh: $a^4+10b^2+c^4\le 10(a^2+b^2+c^2)-18.$

e)Cho $a;\,b;\,c\in[0;2]$ và $a+b+c=3.$ Chứng minh: $3\le a^2+b^2+c^2\le 5.$

f)Cho $a,b,c\in[0;2]$ và $a+b+c=3.$ Chứng minh: $3\le a^3+b^3+c^3-3(a-1)(b-1)(c-1)\le 9.$

g)Cho $a;\,b;\,c\in[-1;2]$ và $a+b+c=0.$ Chứng minh: $a^2+b^2+c^2\le 6$ và $a^2+b^2+c^2\le 8-abc.$

h)Cho $a;\,b;\,c\in[-1;2]$ và $a^2+b^2+c^2=6.$ Chứng minh: $a+b+c\ge 0.$

i)Cho $x, y, z: x+y+z=10$ và $xyz=xy+yz+zx$. Chứng minh: $\dfrac{125}{4}\le xy+yz+zx\le 32.$

Bài 8.Cho $x,\,y,\,z$ là các số thực dương. Chứng minh các bất đẳng thức sau

a) $x^2+y^2+z^2+2xyz+1\ge 2(xy+yz+zx).$

b) $xyz+2(x^2+y^2+z^2)+8\ge 5(x+y+z).$

c) $xyz+x^2+y^2+z^2+5\ge 3(x+y+z).$

c) $x^2+y^2+z^2+2xyz\ge 1,$ với $x+y+z=\dfrac{3}{2}\cdot$

II-BẤT ĐẲNG THỨC CÔ SI

Kỉ thuật ghép đối xứng

Dạng 1. Cho $X,\ Y,\ Z\ge 0.$ Chứng minh: $X+Y+Z\ge A+B+C.$

Chứng minh: $\begin{cases} X+Y \overset{Cauchy}{\ge} 2A \\ Y+Z \overset{Cauchy}{\ge} 2B \\ Z+X \overset{Cauchy}{\ge} 2C \end{cases} \overset{\oplus}{\Rightarrow} 2(X+Y+Z)\ge 2(A+B+C)\Leftrightarrow X+Y+Z\ge A+B+C.$

Tổng quát $\begin{cases} mX+nY+pZ\ge (m+n+p)A \\ mY+nZ+pX\ge (m+n+p)B \\ mZ+nX+pY\ge (m+n+p)C \end{cases} \overset{\oplus}{\Rightarrow} (m+n+p)(X+Y+Z)\ge (m+n+p)(A+B+C)$

Dạng 2. Cho $X,\ Y,\ Z\ge 0.$ Chứng minh: $XYZ\ge ABC.$

Nếu chứng minh được: $\begin{cases} XY\ge A^2 \\ YZ\ge B^2 \\ ZX\ge C^2 \end{cases} \overset{nhân}{\Rightarrow} XYZ\ge \sqrt{A^2B^2C^2}=\left|ABC\right|\ge ABC.$

Bài 1.Chứng minh các bất đẳng thức sau và cho biết dấu đẳng thức xảy ra khi nào ?

a) $a+b+c\ge \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca},\ \forall a;\ b;\ c\ge 0.$

b) $a+b+1\ge \sqrt{ab}+\sqrt{a}+\sqrt{b},\ \forall a;\ b\ge 0.$

c) $ab+bc+ca\ge \sqrt{abc}(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}),\ \forall a;b;c\ge 0.$

d) $a+b+\frac{1}{2}\ge \sqrt{a}+\sqrt{b},\ \forall a;\ b;\ c\ge 0.$

e) $a^2+b^2+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\ge 2(\sqrt{a}+\sqrt{b}),\ \forall a;\ b>0.$

f) $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\ge a+b+c,\ \forall a;\ b;\ c>0.$

g) $\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}\ge \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c},\ \forall a;\ b;\ c>0.$

h) $ab+\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\ge a+b+1,\ \forall a;\ b;\ c>0.$

i) $\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge a+b+c,\ \forall a;\ b;\ c>0.$

j) $a^2+b^2+4\ge ab+2(a+b),\ \forall a;\ b\in \mathbb{R}.$

k) $4a^2+9b^2+5\ge 4(a+3b),\ \forall a;\ b\in \mathbb{R}.$

l) $3a^3+7b^3\ge 9ab^2,\ \forall a\ge 0,\ b\ge 0.$

m) $\frac{a^2}{b^2}+\frac{b^2}{c^2}+\frac{c^2}{a^2}\ge \frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a},\ \forall abc\ne 0.$

n) $\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{c}+\frac{c^3}{a}\ge ab+bc+ca,\ \forall a;\ b;\ c>0.$

o) $(1+a)(1+b)(1+c)\ge (1+\sqrt[3]{abc})^3,\forall a;b;c\ge 0.$

p) $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^8\ge 64ab(a+b)^2,\ \forall a\ge 0,\ b\ge 0.$

q) $a^2(1+b^2)+b^2(1+c^2)+c^2(1+a^2)\ge 6abc,$ với $a,\ b,\ c$ là các số thực không âm.

r) $\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy}+\frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz}+\frac{\sqrt{1+z^3+x^2}}{zx}\ge 3\sqrt{3},\ \forall x;\ y;\ z>0$ và $xyz=1.$

s) $\frac{a+b+c}{a}+\frac{a+b+c}{b}+\frac{a+b+c}{c}\ge 9,$ với $a,\ b,\ c$ là các số thực dương.

t) $\dfrac{a}{a^2+b^2}+\dfrac{b}{b^2+c^2}+\dfrac{c}{a^2+c^2}\le\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$ với $a,\ b,\ c$ là các số thực dương.

u) $\dfrac{a^2}{1+16a^4}+\dfrac{b^2}{1+16b^4}\le\dfrac{1}{4}$ với $a;\ b\in\mathbb{R}$.

v) $\dfrac{ab}{a+b}+\dfrac{bc}{b+c}+\dfrac{ca}{c+a}\le\dfrac{a+b+c}{2},\ \forall\begin{cases}a>0\\ b>0\\ c>0\end{cases}$.

x)Cho $a,\ b,\ c$ là các số thực không âm. Chứng minh: $a+b+c\ge\sqrt[4]{ab^3}+\sqrt[4]{bc^3}+\sqrt[4]{ca^3}$.

y)Cho $x,\ y$ là các số dương thỏa: $x+y\le 1$. Chứng minh: $\dfrac{1}{x^2+y^2}+\dfrac{1}{xy}+4xy\ge 11$.

z)Cho $x,\ y,\ z>0$. Chứng minh: $\dfrac{y+z}{x}+\dfrac{z+x}{y}+\dfrac{x+y}{z}\ge 6$.

w)Cho $x,\ y,\ z$ là các số thực dương. Chứng minh: $\dfrac{x^3}{yz}+\dfrac{y^3}{xz}+\dfrac{z^3}{xy}\ge x+y+z$.

Bài 2.Chứng minh các bất đẳng thức sau và cho biết dấu đẳng thức xảy ra khi nào ?

a) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\ge\dfrac{4}{a+b},\ \forall a>0,\ b>0.$

b) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\ge\dfrac{9}{a+b+c},\ \forall a>0,\ b>0,\ c>0.$

c) $(a+b)(1+ab)\ge 4ab,\ \forall a\ge 0,\ b\ge 0.$

d) $(a+b)(b+c)(c+a)\ge 8abc,\ \forall a,\ b,\ c\ge 0.$

e) $\left(a+\dfrac{b}{c}\right)\left(b+\dfrac{c}{a}\right)\left(c+\dfrac{a}{b}\right)\ge 8,\ \forall\begin{cases}a,b,c>0\\ abc=1\end{cases}$.

f) $\left(1+\dfrac{a}{b}\right)\left(1+\dfrac{b}{c}\right)\left(1+\dfrac{c}{a}\right)\ge 8,\ \forall a,b,c>0.$

g) $(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)\ge 8a^2b^2c^2,\forall a,b,c\ge 0.$

h) $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)\ge 9abc,\ \forall a,b,c\ge 0.$

i) $(abc+2)(bc+2)(a+d)(d+1)\ge 32,\forall\begin{cases}a,b,c,d>0\\ abc=1\end{cases}$

j) $(1+a+b)(a+b+ab)\ge 9ab,\ \forall a\ge 0,\ b\ge 0.$

k) $\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}\ge\dfrac{9}{2},\ \forall\begin{cases}a,b,c>0\\ a+b+c=1\end{cases}$.

l) $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{c+a}\ge\dfrac{3}{2},\ \forall a,b,c>0.$

m) $\left(2a+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)\left(2b+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}\right)\left(2c+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\ge 64,\forall\begin{cases}a>0\\ b>0\\ c>0\end{cases}$.

n) $\left(\dfrac{1}{a}-1\right)\left(\dfrac{1}{b}-1\right)\left(\dfrac{1}{c}-1\right)\ge 8,\ \forall\begin{cases}a,b,c>0\\ a+b+c=1\end{cases}$.

o) $\left(1+\dfrac{1}{a}\right)\left(1+\dfrac{1}{b}\right)\left(1+\dfrac{1}{c}\right)\ge 64;\ \forall\begin{cases}a,\ b,\ c>0\\ a+b+c=1\end{cases}$.

p) $abc\le\dfrac{1}{8},\ \forall\begin{cases}a,b,c,d>0\\ \dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}+\dfrac{1}{1+c}\ge 2\end{cases}$.

q) $abcd\le\dfrac{1}{81},\forall a,\ b,\ c,\ d>0$ và $\dfrac{1}{1+a}+\dfrac{1}{1+b}+\dfrac{1}{1+c}+\dfrac{1}{1+d}\ge 3$.

r) $\dfrac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}+\dfrac{1+\sqrt{1+y^2}}{y}+\dfrac{1+\sqrt{1+z^2}}{z}\le xyz$ với $x,\ y,\ z$ là các số dương thỏa $x+y+z=xyz$.

s)Cho $a,b,c>0$ và đặt $x=a+\dfrac{1}{b},\ y=b+\dfrac{1}{c},\ z=c+\dfrac{1}{a}$. Chứng minh $xy+yz+zx\ge 2(x+y+z)$.

t)Cho $\begin{cases} a,\ b,\ c>0 \\ a+b+c=3 \end{cases}\cdot$ Chứng minh: $\dfrac{3}{abc}+2(ab+bc+ca).=\dfrac{12}{(3-c)^2.c}+4+4c-2c^2.$

u)Cho ΔABC có chu vi bằng 3 và gọi $a,\ b,\ c$ là độ dài 3 cạnh tam giác. Chứng minh rằng ta luôn có: $3a^2+3b^2+3c^2+4abc\ge 13.$

v)Cho $a,\ b,\ c>0$ thỏa $abc=1.$ Chứng minh: $\dfrac{a^2+b^2-c^2}{c}+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{a}+\dfrac{c^2+a^2-b^2}{b}\ge 3.$

v)Cho $x,\ y$ là các số dương thỏa: $x+y=1.$ Chứng minh: $\left(x^2+\dfrac{1}{y^2}\right)\left(y^2+\dfrac{1}{x^2}\right)\ge\dfrac{289}{16}\cdot$

x)Cho $a,\ b,\ c$ là các số thực dương. Chứng minh: $abc\ge(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c).$

y)Cho $a,\ b,\ c\ge 0$ thỏa: $ab+bc+ca>0.$ Chứng minh: $\sqrt{\dfrac{1+a^2}{b+c}}+\sqrt{\dfrac{1+b^2}{c+a}}+\sqrt{\dfrac{1+c^2}{a+b}}\ge 3.$

Bài 3.Chứng minh các bất đẳng thức sau

a)Cho $a,\ b$ là các số dương. Chứng minh: $(a+b+2)\left(\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{b+1}\right)\ge 4.$

b)Cho $a,\ b,\ c$ là các số dương. Chứng minh: $(a+b+c)\left(\dfrac{1}{a+b}+\dfrac{1}{b+c}+\dfrac{1}{c+a}\right)\ge\dfrac{9}{2}\cdot$

c)Cho $a\ge 0; b\ge 0$ Chứng minh: $a+b+1\ge\sqrt{ab}+\sqrt{a}+\sqrt{b}.$

d)Cho $a,b\in R$. Chứng minh: $a^2+b^2+9\ge ab+3(a+b).$

e)Cho $a\ge 0, b\ge 0$. Chứng minh: $\dfrac{a+b}{2}.\dfrac{a^2+b^2}{2}\le\dfrac{a^3+b^3}{2}\cdot$

f)Cho $a,b\in R$. Chứng minh rằng: $a^2+b^2+1\ge ab+a+b.$

g)Cho $a>0, b>0$. Chứng minh rằng: $\dfrac{a}{2a+b}+\dfrac{b}{2b+a}\le\dfrac{2}{3}\cdot$

h)Cho $a>0, b>0, c>0$ Chứng minh rằng: $(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\ge 16\sqrt{2}abc.$

i)Cho 3 số dương a,b,c. Chứng minh: $\dfrac{a}{bc}+\dfrac{b}{ac}+\dfrac{c}{ab}\ge\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\cdot$

k)Cho $a>0, b>0, c>0$.Chứng minh: $\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ca}{b}+\dfrac{ab}{c}\ge a+b+c.$

l)Cho 3 số dương $a;\ b;\ c.$ Chứng minh: $a^2+b^2+c^2+2abc+1\ge 2(ab+bc+ac).$

m)Cho $a>0, b>0, c>0$. Chứng minh: $\dfrac{a^2}{b^2}+\dfrac{b^2}{c^2}+\dfrac{c^2}{a^2}\ge\dfrac{a}{c}+\dfrac{c}{b}+\dfrac{b}{a}\cdot$

n)Cho $a\ge 0, b\ge 0$. Chứng minh: $a+b+1\ge\sqrt{ab}+\sqrt{a}+\sqrt{b}.$

o)Cho $a>0, b>0$ Chứng minh: $(a+3)(2b+1)\left(6+\dfrac{1}{a}\right)\ge 48.$

p)Cho $a>0, b>0, c>0$. Chứng minh: $\left(a+\dfrac{1}{a}\right)\left(b+\dfrac{1}{b}\right)\left(c+\dfrac{1}{c}\right)\ge 8.$

q)Cho $a>0, b>0, c>0$. Chứng minh: $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\ge\dfrac{1}{\sqrt{ab}}+\dfrac{1}{\sqrt{bc}}+\dfrac{1}{\sqrt{ca}}\cdot$

Bài 4.Chứng minh các bất đẳng thức sau

a)Cho $a>0, b>0, c>0$. Chứng minh: $\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}\ge \frac{1}{\sqrt{ab}}+\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ac}}\cdot$

b)Cho $x>0$ và $y>0$. Chứng minh: $(1+xy)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\ge 4.$

c)Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh: $\left(1+\frac{a}{b}\right)\cdot\left(4+\frac{b}{c}\right)\cdot\left(9+\frac{c}{a}\right)>48.$

d)Cho $a\ge 0, b\ge 0, c\ge 0$. Chứng minh: $(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)\ge 9abc.$

e)Cho $a\ge 0;\ b\ge 0;\ c\ge 0.$ Chứng minh: $(1+a)(1+b)(a+c)(b+c)\ge 16abc.$

f)Cho $a\ge 0, b\ge 0, c\ge 0$ Chứng minh: $(a+b)(b+c)(c+a)\ge 8abc.$

g)Cho $a>0,\ b>0,\ c>0.$ Chứng minh: $\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)\ge 8.$

h)Cho $a,\ b,\ c$ là các số thực dương. Chứng minh: $a+4b+9c\ge 2\sqrt{ab}+6\sqrt{bc}+3\sqrt{ca}.$

i)Cho $a>0,\ b>0,\ c>0.$ Chứng minh: $ab+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge a+b+1$ và $\frac{a^2}{b+c}+\frac{b^2}{a+c}+\frac{c^2}{a+b}\ge \frac{a+b+c}{2}\cdot$

k)Cho 3 số dương $a,\ b,\ c$ thỏa $abc=1.$ Chứng minh: $(a+1)(b+1)(c+1)\ge 8.$

l)Cho 3 số a, b, c không âm thỏa $abc=1.$ Chứng minh: $a^2(1+b)+b^2(1+c^2)+c^2(1+a^2)\ge 6.$

m)Cho $\begin{cases} a>0,\ b>0,\ c>0 \\ a+b+c=2 \end{cases}\cdot$ Chứng minh: $\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}\le 1.$ Dấu $"="$ xảy ra khi nào ?

n)Cho $\begin{cases} a>0,\ b>0,\ c>0 \\ a+b+c=3. \end{cases}\cdot$ Chứng minh: $\frac{a^2}{c}+\frac{b^2}{a}+\frac{c^2}{b}\ge 3.$ Dấu đẳng thức xảy ra khi nào ?

p)Cho hai số dương a và b, chứng minh: $a^2b+b^2a+a+b\ge 4ab.$ Đẳng thức xảy ra khi nào ?

KỶ THUẬT TÁCH THÊM BỚT – CHỌN ĐIỂM RƠI

Nhắc lại bất đẳng thức Cauchy và một số dạng khác của nó:

① $\forall a\ge 0;\ b\ge 0$ thì ta có: $\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}.$ Dấu $"="$ xảy ra khi và chỉ khi $a=b.$

Một số dạng khác của bất đẳng thức trên:

- $\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2},\ \forall a\ge 0,\ b\ge 0.$
- $a.b\le\left(\frac{a+b}{2}\right)^2,\ \forall a,\ b\in\mathbb{R}.$
- $ab\le\frac{a^2+b^2}{2},\ \forall a,\ b\in\mathbb{R}.$
- $a^2+b^2\ge 2ab,\ \forall a,\ b\in\mathbb{R}.$

② $\forall a\ge 0;\ b\ge 0;\ c\ge 0$ thì ta có: $\frac{a+b+c}{3}\ge\sqrt[3]{abc}.$ Dấu $"="$ xảy ra khi và chỉ khi $a=b=c.$

Một số dạng khác của bất đẳng thức trên:

- $\sqrt[3]{a.b.c}\le\frac{a+b+c}{3},\ \forall a\ge 0,\ b\ge 0,\ c\ge 0.$
- $abc\le\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3,\ \forall a\ge 0,\ b\ge 0,\ c\ge 0.$

- $abc \le \dfrac{a^3+b^3+c^3}{3}, \ \forall a \ge 0, \ b \ge 0, \ c \ge 0.$
- $a^3+b^3+c^3 \ge 3abc, \ \forall a \ge 0, \ b \ge 0, \ c \ge 0.$

✶ **Một số hằng đẳng thức cần nhớ**:

- $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y).$
- $x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx).$
- $x^3+y^3+z^3=\left[\begin{array}{l}(x+y+z)^3-3(x+y)(y+z)(z+x)\\ 3xyz+(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)\end{array}\right..$

<u>BÀI TẬP VẬN DỤNG</u>

<u>Bài 5</u>.Chứng minh các ***bất đẳng thức phụ thường được sử dụng*** sau:

a) $x^2+y^2+z^2 \ge xy+yz+zx.$

b) $(x+y)(y+z)(z+x) \ge 8xyz, \ \forall x, \ y, \ z \ge 0.$

c) $3(x^2+y^2+z^2) \ge (x+y+z)^2, \ \forall x, \ y, \ z.$

d) $(x+y+z)^2 \ge 3(xy+yz+zx), \forall x, \ y, \ z \ge 0.$

e) $(xy+yz+zx)^2 \ge 3xyz(x+y+z), \forall x, \ y, \ z \ge 0.$

f) $x^3+y^3 \ge \dfrac{1}{4}(x+y)^3, \ \forall x, \ y \ge 0.$

g) $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2) \ge 3(x^2y+y^2z+z^2x), \ \forall x, \ y, \ z > 0.$

<u>Bài 6</u>.Chứng minh các bất đẳng thức sau và cho biết dấu đẳng thức xảy ra khi nào ?

a) $\dfrac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}} \ge 2, \ \forall a \in \mathbb{R}.$

b) $\dfrac{a^2+6}{\sqrt{a^2+2}} \ge 4, \ \forall a \in \mathbb{R}.$

c) $\dfrac{x+4}{\sqrt{x+3}} \ge 2, \ \forall x > -3.$

d) $\dfrac{x+8}{\sqrt{x-1}} \ge 6, \ \forall x > 1.$

e) $\dfrac{a^2+5}{\sqrt{a^2+1}} \ge 4, \ \forall a \in \mathbb{R}.$

f) $x+\dfrac{1}{x-1} \ge 3, \ \forall x > 1.$

g) $5x+\dfrac{1}{x-3} \ge 15+2\sqrt{5}, \ \forall x > 3.$

h) $\dfrac{x}{2}+\dfrac{16}{x-2} \ge 3, \ \forall x > 2.$

i) $\dfrac{2}{1-x}+\dfrac{1}{x} \ge 3+2\sqrt{2}, \ \forall x \in (0;1).$

j) $9x+\dfrac{3x+1}{x-1} \ge 24, \ \forall x > 1.$

k) $a+\dfrac{1}{a} \ge \dfrac{10}{3}, \ \forall a \ge 3.$

l) $a+\dfrac{1}{a} \ge \dfrac{17}{4}, \ \forall a \ge 4.$

m) $a+\dfrac{1}{a^2} \ge \dfrac{9}{4}, \ \forall a \ge 2.$

n) $x^2+\dfrac{18}{x} \ge 39, \ \forall x \ge 6.$

o) $\left(a+\dfrac{1}{a}\right)\left(b+\dfrac{1}{b^2}\right) \ge \dfrac{153}{16}, \ \forall a \ge 4, \ b \ge 2.$

p) $x+\dfrac{1}{(x-y).y} \ge 3, \ \forall x > y > 0.$

q) $x+\dfrac{4}{(x-2)^2} \ge 5, \ \forall x > 2.$

r) $a+\dfrac{4}{b.(a-b)^2} \ge 2\sqrt{2}, \ \forall a > b > 0.$

s) $x+\dfrac{4}{(x-y)(y+1)^2} \ge 3, \ \forall x > y \ge 0.$

t) $a+\dfrac{1}{c(a-b)(b-c)} \ge 4, \ \forall a > b > c > 0.$

u) $a+\dfrac{27}{2(a-1)(a+1)^3} \ge \dfrac{5}{2}, \ \forall a > 1.$

v) $2a+\dfrac{1}{(a-b)(b-c)(a+1)^3} \ge 4, \forall a > b > c > 0.$

x) $x+2y+\frac{25}{x}+\frac{27}{y^2}\ge 19,\ \forall x,\ y>0.$

y) $\frac{a^2+b^2}{a-b}\ge 2\sqrt{2},\ \forall\begin{cases}a>b\\ ab=1\end{cases}.$

z) $2a^4+\frac{1}{1+a^2}\ge 3a^2-1,\ \forall a\in\mathbb{R}.$

w) $\frac{2a^3+1}{4b(a-b)}\ge 3,\ \forall a\ge\frac{1}{2},\ \frac{a}{b}>1.$

Bài 7.Chứng minh các bất đẳng thức sau và cho biết dấu đẳng thức xảy ra khi nào ?

Cho $x>0, y>0, z>0$ Chứng minh:

a) $\frac{x^2}{x+y}+\frac{y^2}{y+z}+\frac{z^2}{z+x}\ge\frac{x+y+z}{2}.$

b) $\frac{x^2}{y+2z}+\frac{y^2}{z+2x}+\frac{z^2}{x+2y}\ge\frac{x+y+z}{3}.$

c) $\frac{x^2}{3y+2z}+\frac{y^2}{3z+2x}+\frac{z^2}{3x+2y}\ge\frac{x+y+z}{5}.$

d) $\frac{x^3}{(y+z)^2}+\frac{y^3}{(z+x)^2}+\frac{z^3}{(x+y)^2}\ge\frac{x+y+z}{4}.$

e) $\frac{x^3}{y+z}+\frac{y^3}{z+x}+\frac{z^3}{x+y}\ge\frac{x^2+y^2+z^2}{2}.$

f) $\frac{x^3}{2y+z}+\frac{y^3}{2z+x}+\frac{z^3}{2x+y}\ge\frac{x^2+y^2+z^2}{3}.$

g) $\frac{x^3}{2y+3z}+\frac{y^3}{2z+3x}+\frac{z^3}{2x+3y}\ge\frac{x^2+y^2+z^2}{5}.$

h) $\frac{x^3}{y(z+x)}+\frac{y^3}{z(x+y)}+\frac{z^3}{x(y+z)}\ge\frac{x+y+z}{2}.$

Bài 8.Chứng minh các bất đẳng thức sau

a)Cho $\begin{cases}x,\ y,\ z\ge 0\\ xyz=1\end{cases}$. Chứng minh: $\frac{x^2}{1+y}+\frac{y^2}{1+z}+\frac{z^2}{1+x}\ge\frac{3}{2}.$

b)Cho $\begin{cases}x,\ y>0\\ xy=1\end{cases}.$ Chứng minh: $\frac{x^3}{1+y}+\frac{y^3}{1+x}\ge 1.$

c)Cho $\begin{cases}x,\ y,\ z>0\\ xyz=1\end{cases}.$ Chứng minh: $\frac{x^3}{y^2}+\frac{y^3}{z^2}+\frac{z^3}{x^2}\ge 3.$

d)Cho $\begin{cases}x,\ y,\ z>0\\ xyz=1\end{cases}.$ Chứng minh: $\frac{x^3}{(1+y)(1+z)}+\frac{y^3}{(1+x)(1+z)}+\frac{z^3}{(1+x)(1+y)}\ge\frac{3}{4}.$

e)Cho $\begin{cases}x,y,z\ge 0\\ xy+yz+zx=3\end{cases}.$ Chứng minh: $\frac{x^3}{y^2+3}+\frac{y^3}{z^2+3}+\frac{z^3}{x^2+3}\ge\frac{3}{4}.$

Bài 9.Chứng minh các bất đẳng thức sau và cho biết dấu đẳng thức xảy ra khi nào ?

a)Cho $a,\ b,\ c>0$ thỏa $a+b+c=3.$ Chứng minh: $\sqrt{a+3b}+\sqrt{b+3c}+\sqrt{c+3a}\le 6.$

b)Cho $a,\ b,\ c>0$ thỏa $a+b+c=1.$ Chứng minh: $\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}\le\sqrt{6}.$

c)Cho $\begin{cases}a,\ b,\ c,\ d\ge 0\\ a+b+c+d=1\end{cases}.$Chứng minh: $\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}+\sqrt{4d+1}\le 4\sqrt{2}.$

d)Cho $a,\ b,\ c>0$ thỏa $a+b+c=1.$ Chứng minh: $\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{bc}+\sqrt[3]{ca}\le\sqrt[3]{3}.$

e)Cho $a,\ b,\ c>0$ thỏa $a+b+c=6.$ Chứng minh: $\sqrt[3]{a+3b}+\sqrt[3]{b+3c}+\sqrt[3]{c+3a}\le 6.$

f)Cho $a,\ b,\ c>0$ thỏa $a+b+c=3.$ Chứng minh: $\sqrt[3]{a+2b}+\sqrt[3]{b+2c}+\sqrt[3]{c+2a}\le 3\sqrt[3]{3}.$

g)Cho $a,\ b,\ c>0$ thỏa $a+b+c=1$.Chứng minh: $\sqrt[3]{3a+1}+\sqrt[3]{3b+1}+\sqrt[3]{3c+1}\le 3\sqrt[3]{2}.$

i)Cho $a\ge 1,\ b\ge 1.$ Chứng minh: $a\sqrt{b-1}+b\sqrt{a-1}\le ab.$

Bài 10.Chứng minh các bất đẳng thức sau

a)Cho $x,\ y\ge 1.$ Chứng minh: $x\sqrt{y-4}+y\sqrt{x-4}\le \dfrac{xy}{2}\cdot$

b)Cho các số thực $a,\ b,\ c$ thỏa $a>c>0$ và $b>c.$ Chứng minh: $\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}\le \sqrt{ab}.$

c)Cho $x,\ y,\ z\ge 1.$ Chứng minh: $xy\sqrt{z-1}+yz\sqrt{x-1}+zx\sqrt{y-1}\le \dfrac{3xyz}{2}\cdot$

d)Cho $x\ge 4,\ z\ge 1,\ y\ge 9.$ Chứng minh: $xy\sqrt{z-1}+yz\sqrt{x-4}+zx\sqrt{y-9}\le \dfrac{11xyz}{12}\cdot$

e)Cho $x>0,\ y>0,\ z>0.$ Chứng minh: $\dfrac{1}{\sqrt{(x+2z)(y+2z)xy}}\ge \dfrac{3}{(x+y+z)^2}\cdot$

f)Cho $a>0,\ b>0,\ c>0.$ Chứng minh: $\dfrac{1}{(a+b)\sqrt{(a+2c)(b+2c)}}\ge \dfrac{3}{2(a+b+c)^2}\cdot$

g)Cho số thực không âm x.Chứng minh: $6.\sqrt[3]{4x^3+x}\le 4x+4x^2+2.$

h)Cho số thực $x\in\left[4;6\right].$ Chứng minh: $\sqrt{x-4}+\sqrt{6-x}\le 2.$

i)Cho số thực $x\in\left[-\dfrac{1}{3};5\right]\cdot$ Chứng minh: $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x+1}+4\sqrt{5-x}\le 12.$

j)Cho số thực $x\in\left[\sqrt{2};2\sqrt{2}\right].$ Chứng minh: $\sqrt{8-x^2}+\sqrt{\dfrac{x^2-2}{2x^2}}\le \dfrac{15}{4}-\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{1}{x^2}\cdot$

k)Cho số thực $x\ge 1.$ Chứng minh: $\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}\le x.$

l)Cho số thực $x\ge 2.$ Chứng minh: $\sqrt{x+1}+\dfrac{4(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2})}{3(\sqrt{x-2}+1)^2}\le 3.$

Bài 11.Tìm giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau và cho biết giá trị ấy đạt tại vị trí nào của biến ?

a) $y=\dfrac{x}{2}+\dfrac{18}{x},\ \forall x>0.$

b) $y=x+\dfrac{4}{x-1},\ \forall x>1.$

c) $y=x+1+\dfrac{4}{x-3},\ \forall x>3.$

d) $y=x+\dfrac{1}{4x},\ \forall x>0.$

e) $y=5x+\dfrac{1}{20(x-1)},\ \forall x>1.$

f) $y=\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x-1},\ \forall x>1.$

g) $y=\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x-2},\ \forall x>2.$

h) $y=\dfrac{3x}{2}+\dfrac{1}{x+1},\ \forall x>-1.$

i) $y=\dfrac{x}{3}+\dfrac{5}{2x-1},\ \forall x>\dfrac{1}{2}\cdot$

j) $y=\dfrac{x}{1-x}+\dfrac{5}{x},\ \forall x\in(0;1).$

k) $y=\frac{x+3}{4}+\frac{16}{x+1},\ \forall x>-1.$

l) $y=\frac{x^3+1}{x^2},\ \forall x>0.$

m) $y=\frac{x^4+1}{x^2},\ \forall x\neq 0.$

n) $y=3x+\frac{1}{x^3},\ \forall x>0.$

o) $y=\frac{x^2+4x+4}{x},\ \forall x>0.$

p) $y=\frac{x^2+x+4}{x+1},\ \forall x>-1.$

q) $y=\frac{(4+x)(x+2)}{x},\ \forall x>0.$

r) $y=\frac{(2x+5)(5x+14)}{x},\ \forall x>0.$

s) $y=\frac{x^2-x+9}{x-2},\ \forall x>2.$

t) $y=\frac{x^2-x+3}{\sqrt{1-x^3}},\ \forall x\in(0;1).$

u) $y=\frac{4x+1}{\sqrt{x}},\ \forall x>0.$

v) $y=\frac{x}{\sqrt{x-1}},\ \forall x>1.$

x) $y=\frac{x}{\sqrt{x-3}},\ \forall x>3.$

y) $P=\frac{xy}{\sqrt{(x-1)(y-1)}},\ \forall x>1,\ y>1.$

z) $P=\frac{xy}{\sqrt{(x-4)(y-1)}},\ \forall x>4,\ y>1.$

w) $P=\frac{xy}{\sqrt{(x-9)(y-9)}},\ \forall x>9,\ y>9.$

Bài 12.Tìm giá trị lớn nhất của các hàm số sau và cho biết giá trị ấy đạt tại vị trí nào của biến ?

a) $y=x(4-x),\ \forall x\in[0;4].$

b) $y=4x(8-5x),\ \forall x\in\left[0;\frac{8}{5}\right]\cdot$

c) $y=(x+3)(5-2x),\ \forall x\in\left[-3;\frac{5}{2}\right]\cdot$

d) $y=(2x-1)(4-3x),\ \forall x\in\left[\frac{1}{2};\frac{4}{3}\right]\cdot$

e) $y=(2x-1)(3-5x),\ \forall x\in\left[\frac{1}{2};\frac{3}{5}\right]\cdot$

f) $y=4(x-1)(8-5x),\ \forall x\in\left[1;\frac{8}{5}\right]\cdot$

g) $y=4x^3-x^4,\ \forall x\in[0;4]\cdot$

h) $y=(1-x)(1-x^2),\ \forall x\in[-1;1]\cdot$

i) $y=x^2(3-x),\ \forall x\in[0;3]\cdot$

j) $y=x^2(1-x),\ \forall x\in[0;1]\cdot$

k) $y=x(a-2x)^2,\ \forall x\in\left[0;\frac{a}{2}\right]\cdot$

l) $y=|x|\sqrt{4-x^2},\ \forall x\in[-2;2]\cdot$

m) $y=x^2\sqrt{9-x^2},\ \forall x\in[-3;3]\cdot$

n) $y=x+\sqrt{2-x^2},\ \forall x\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]\cdot$

o) $y=(4+x)\sqrt{16-x^2},\ \forall x\in[0;4]\cdot$

p) $y=(a+x)\sqrt{a^2-x^2},\ \forall x\in[0;a]\cdot$

q) $y=\sqrt[3]{x^2(2-x)},\ \forall x\in[0;2]\cdot$

r) $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{5-x}.$

s) $y=\sqrt{x-2}+2\sqrt{6-x}.$

t) $y=5\sqrt{x+1}+3\sqrt{6-x}.$

u) $y=\frac{\sqrt{x-1}}{x},\ \forall x\geq 1.$

v) $y=\frac{\sqrt{x-2}}{x},\ \forall x>2.$

x) $P=\dfrac{x\sqrt{y-4}+y\sqrt{x-4}}{xy}\cdot$

y) $P=\dfrac{x\sqrt{y-4}+y\sqrt{x-1}}{xy}\cdot$

z) $P=\dfrac{x\sqrt{y-2}+y\sqrt{x-3}}{xy}\cdot$

w) $P=\dfrac{x\sqrt{y-5}+y\sqrt{x-2}}{xy}\cdot$

<u>Cô si ngược dấu</u>

> *Một số trường hợp nếu đánh giá trực tiếp bằng Cauchy thì sẽ đưa về dạng $A\le P\ge B$: không nói lên được điều gì ?! Khi đó, ta biến đổi và áp dụng BĐT Cauchy ngược dấu sẽ tránh được điều này. Chẳng hạn cần chứng minh: $\dfrac{a}{1+b^2}\ge ?!$. Nếu áp dụng Cauchy dưới mẫu số được $\dfrac{a}{1+b^2}\le\dfrac{a}{2b}$ sẽ không đạt yêu cầu. Khi đó cần thêm trước nó là dấu "−" tức biến đổi $\dfrac{a}{1+b^2}=\dfrac{a(1+b^2)-ab^2}{1+b^2}=a-\dfrac{ab^2}{1+b^2}\overset{Cauchy}{\ge}a-\dfrac{ab}{2}$ sẽ được dấu mong muốn.*
>
> *Thông thường, sau khi sử dụng kỹ thuật ngược dấu sẽ đưa bài toán bất đẳng thức hoán vị về dạng bất đẳng thức đối xứng và giản lược đi mẫu số, giúp ta dễ dàng xử lý hơn so với đề nguyên thủy.*

<u>Bài 13</u>.Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện: $x+y+z=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\dfrac{x}{1+y^2}+\dfrac{y}{1+z^2}+\dfrac{z}{1+x^2}\cdot$

<u>Bài 14</u>.Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x+y+z=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\dfrac{x^2}{x+2y^2}+\dfrac{y^2}{y+2z^2}+\dfrac{z^2}{z+2x^2}\cdot$

<u>Bài 15</u>.Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x+y+z=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\dfrac{x^2}{x+2y^3}+\dfrac{y^2}{y+2z^3}+\dfrac{z^2}{z+2x^3}\cdot$

<u>Bài 16</u>.Cho các số thực không âm x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x+y+z=3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\dfrac{x+1}{y^2+1}+\dfrac{y+1}{z^2+1}+\dfrac{z+1}{x^2+1}\cdot$

<u>Bài 17</u>.Cho x, y, z là ba số thực dương.Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P=\frac{\sqrt{yz}}{x+2\sqrt{yz}}+\frac{\sqrt{xz}}{y+2\sqrt{xz}}+\frac{\sqrt{xy}}{z+2\sqrt{xy}}\cdot$$

<u>Bài 18</u>.Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn điều kiện: $xyz=1$. Hãy tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\dfrac{x^4y}{x^2+1}+\dfrac{y^4z}{y^2+1}+\dfrac{z^4x}{z^2+1}\cdot$

<u>Bài 19</u>.Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện: $x+y+z=3$.

Chứng minh rằng: $\dfrac{x^3}{x^2+y^2}+\dfrac{y^3}{y^2+z^2}+\dfrac{z^3}{z^2+x^2}\ge\dfrac{x+y+z}{2}\cdot$

<u>Bài 20</u>.Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn điều kiện: $x+y+z=3$.

Chứng minh rằng: $\frac{x}{y^3+xy}+\frac{y}{z^3+yz}+\frac{z}{z^3+zx}\geq\frac{3}{2}\cdot$

<u>Bài 21</u>.Cho $x,\ y,\ z>0$ thỏa mãn điều kiện: $xyz=1$. Chứng minh: $x+y+z\geq\frac{1+x}{1+y}+\frac{1+y}{1+z}+\frac{1+z}{1+x}\cdot$

<u>Bài 22</u>.Cho $\begin{cases}x,\ y,\ z\geq 0\\ x+y+z=3\end{cases}\cdot$ Chứng minh: $\frac{x}{y^3+16}+\frac{y}{z^3+16}+\frac{z}{x^3+16}\geq\frac{1}{6}\cdot$

<u>KỸ THUẬT ĐỔI BIẾN</u>

Mục đích chính của việc đổi biến là chuyển bài toán từ tình thế khó biến đổi đại số (biến cũ) sang trạng thái dễ biến đổi đại số hơn (biến mới). Thông thường, với bài toán biến mới là những bài toán quen thuộc. Do đó, cần phải nắm vững các kĩ thuật biến đổi cũng như việc sử dụng thành thạo các BĐT thông dụng và cần nhớ rằng, nếu bài toán có điều kiện ràng buộc thì khi đổi biến cần chú ý điều kiện biến mới sao cho khi đặt ẩn thì điều kiện ban đầu và cuối cùng được đảm bảo, chẳng hạn như: Cho $a,\ b,\ c>0$ và $abc=1$. Tìm GTLN – GTNN của biểu thức $P=$.......... Từ điều kiện, ta có thể đặt $a=\frac{x}{y},\ b=\frac{y}{z},\ c=\frac{z}{x}$ nhằm đảm bảo điều kiện ban đầu: $abc=\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{x}=1.$

Phép đặt ẩn phụ cũng thường gặp đối với bài toán đẳng cấp, nghĩa là sau khi chia cần đổi biến.

<u>*BÀI TẬP VẬN DỤNG*</u>

<u>Bài 23</u>.Cho $x,\ y$ là 2 số thực khác 0. Chứng minh: $\frac{4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}+\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}\geq 3.$

<u>Bài 24</u>.Cho $\begin{cases}x>0,\ y>0,\ z>0\\ x+y+z=1\end{cases}\cdot$ Chứng minh: $\frac{3}{xy+yz+zx}+\frac{2}{x^2+y^2+z^2}\geq 14.$

<u>Bài 25.</u>Cho 3 số thực dương $a,\ b,\ c$ thỏa mãn điều kiện: $2ab+5bc+6ca=6abc.$ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{ab}{b+2a}+\frac{4bc}{b+4c}+\frac{9ca}{a+4c}\cdot$

<u>Bài 26.</u>Cho $\begin{cases}x>0,y>0,z>0\\ \frac{1}{3^x}+\frac{1}{3^y}+\frac{1}{3^z}=1\end{cases}\cdot$ Chứng minh rằng: $\frac{9^x}{3^x+3^{y+z}}+\frac{9^y}{3^y+3^{x+z}}+\frac{9^z}{3^z+3^{x+y}}\geq\frac{3^x+3^y+3^z}{4}\cdot$

<u>Bài 27</u>.Cho $\begin{cases}x,\ y,\ z>0\\ xyz=1\end{cases}\cdot$ Chứng minh: $\frac{x^2(y+z)}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}}+\frac{y^2(z+x)}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}}+\frac{z^2(x+y)}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}\geq 2.$

<u>Bài 28</u>.Cho $a,\ b,\ c$ là độ dài 3 cạnh tam giác. Chứng minh: $\frac{a^2}{b+c-a}+\frac{b^2}{c+a-b}+\frac{c^2}{a+b-c}\geq a+b+c.$

<u>Bài 29</u>.Cho $x>0,\ y>0,\ z>0.$ Chứng minh: $\frac{x}{2x+y+z}+\frac{y}{2y+z+x}+\frac{z}{2z+x+y}\geq\frac{3}{4}\cdot$

Bài 30.Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn điều kiện: $abc=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\cdot$

Bài 31.Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh: $\frac{a+b}{a+b+c}+\frac{b+c}{4a+b+c}+\frac{c+a}{16b+c+a}\geq\frac{16}{15}\cdot$

Bài 32.Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh: $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}, (BĐT: Nesbitt)\cdot$

Bài 33.Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh: $\frac{x}{2x+y+z}+\frac{y}{2y+z+x}+\frac{z}{2z+x+y}\leq\frac{3}{4}\cdot$

Bài 34.Cho $\begin{cases}a, b, c>0\\abc=1\end{cases}\cdot$ Chứng minh: $\left(a-1+\frac{1}{b}\right)\left(b-1+\frac{1}{c}\right)\left(c-1+\frac{1}{a}\right)\leq 1, (IMO-2000).$

Bài 35.Cho $\begin{cases}a, b, c>0\\ab+bc+ca=abc\end{cases}\cdot$ Chứng minh: $\frac{\sqrt{b^2+2a^2}}{ab}+\frac{\sqrt{c^2+2b^2}}{cb}+\frac{\sqrt{a^2+2c^2}}{ac}\geq\sqrt{3}.$

Bài 36.Cho $\begin{cases}x, y, z>0\\\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1\end{cases}\cdot$ Chứng minh: $\sqrt{x+yz}+\sqrt{y+xz}+\sqrt{z+yx}\geq\sqrt{xyz}+\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}.$

Bài 37.Cho $\begin{cases}a, b, c, d>0\\ab=cd=1\end{cases}\cdot$ Chứng minh: $(a+b)(c+d)+4\geq 2(a+b+c+d).$

Bài 38.Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh: $\frac{a^2+bc}{b+c}+\frac{b^2+ca}{c+a}+\frac{c^2+ab}{a+b}\geq a+b+c.$

Bài 39.Cho các số thực dương a, b, c. Chứng minh: $\frac{(a+b+c)^3}{27abc}+\frac{6(ab+bc+ca)}{(a+b+c)^2}\geq 3.$

Bài 40.Cho $x>2, y>2, z>2$ và $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$. Chứng minh: $(x-2)(y-2)(z-2)\leq 1.$

Bất đẳng thức Cauchy – Schwarz loại I

① $\forall x;\ y;\ a;\ b \in \mathbb{R}$ thì: $\begin{cases}(a.x+b.y)^2 \le (a^2+b^2)(x^2+y^2)\\ |a.x+b.y| \le \sqrt{(a^2+b^2)(x^2+y^2)}\end{cases}$. Dấu "=" xảy ra khi $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}$, $(a;\ b \ne 0)$.

② $\forall x;\ y;\ z;\ a;\ b;\ c \in \mathbb{R}$ thì: $\begin{cases}(a.x+b.y+c.z)^2 \le (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\\ |a.x+b.y+c.z| \le \sqrt{(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)}\end{cases}$.

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$ $(a;\ b;\ c \ne 0)$.

Bất đẳng thức Cauchy – Schwarz loại II (cộng mẫu số)

③ $\forall x;\ y \in \mathbb{R}$ và $a>0,\ b>0$ thì $\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{y^2}{b} \ge \dfrac{(x+y)^2}{a+b}$. Dấu "=" xảy ra khi $\dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}$.

④ $\forall x;\ y;\ z \in \mathbb{R}$ và $a>0,\ b>0,\ c>0$ thì $\dfrac{x^2}{a}+\dfrac{y^2}{b}+\dfrac{z^2}{c} \ge \dfrac{(x+y+z)^2}{a+b+c}$. Dấu "=" $\Leftrightarrow \dfrac{x}{a}=\dfrac{y}{b}=\dfrac{z}{c}$.

Thông thường, ta sẽ sử dụng dạng cộng mẫu số khi có dạng bình phương và cả 2 dạng làm cho bậc của bất đẳng thức giảm đi.

Bài 1.Chứng minh các bất đẳng thức sau

a)Nếu $2x+3y=4$ thì $2x^2+3y^2 \ge \dfrac{16}{5}$.

b) Nếu $6x+y=5$ thì $9x^2+y^2 \ge 5$.

c)Nếu $3x+4y=7$ thì $x^2+y^2 \ge \dfrac{49}{25}$.

d)Nếu $6x+12y=5$ thì $4x^2+9y^2 \ge 1$.

e)Nếu $3x+4y=10$ thì $x^2+y^2 \ge 4$.

f)Nếu $x+7y=10$ thì $x^2+y^2 \ge 2$.

g)Nếu $3a+4b=7$ thì $3a^2+4b^2 \ge 7$.

h)Nếu $2a-3b=7$ thì $3a^2+5b^2 \ge \dfrac{735}{47}$.

i)Nếu $3a-5b=8$ thì $7a^2+11b^2 \ge \dfrac{2464}{137}$.

j)Nếu $a+2b=2$ thì $a^2+b^2 \ge \dfrac{4}{5}$.

k)Nếu $2a+3b=5$ thì $2a^2+3b^2 \ge 5$.

l) $(x-2y+1)^2+(2x-4y+5)^2 \ge \dfrac{9}{5},\ \forall x,\ y \in \mathbb{R}$.

Bài 2.Chứng minh các bất đẳng thức sau

a)Nếu $x^2+y^2=1$ thì $|3x+4y| \le 5$.

b) Nếu $x^2+2y^2=8$ thì $|2x+3y| \le 2\sqrt{17}$.

c)Nếu $x^2+4y^2=1$ thì $|x-y| \le \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

d) Nếu $36x^2+16y^2=9$ thì $|y-2x| \le \dfrac{5}{4}$.

e)Nếu $4(a-1)^2+9(b-2)^2=5$ thì $|2a+6b-20| \le 5$.

Bài 3.Chứng minh các bất đẳng thức sau

a) $6\sqrt{x-1}+8\sqrt{3-x} \le 10\sqrt{2},\ \forall x \in [1;3]$.

b) $3\sqrt{x-1}+4\sqrt{5-x} \le 10,\ \forall x \in [1;5]$.

c) $\sqrt{1-x}+\sqrt{2+x} \le \sqrt{6},\ \forall x \in [-2;1]$.

d) $2\sqrt{x-4}+\sqrt{13-x} \le 3\sqrt{5},\ \forall x \in [4;13]$.

e) $3\sqrt{x+5}+2\sqrt{20-a} \le 13,\ \forall x \in [-5;20]$.

f) $5\sqrt{x+9}+2\sqrt{20-x} \le 29,\ \forall x \in [-9;20]$.

Bài 4.Chứng minh các bất đẳng thức sau

a)Nếu $x,\ y,\ z>0$ và $x+y+z=1$ thì $\sqrt{1-x}+\sqrt{1-y}+\sqrt{1-z} \le \sqrt{6}$.

b)Nếu $\forall a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ thì $3(a^2+b^2+c^2) \ge (a+b+c)^2$.

c)Nếu $a^2+b^2+c^2=1$ thì $a+3b+5c \le \sqrt{35}$.

d)Nếu $a^2+b^2+c^2=1$ thì $a+2b+2\sqrt{5}c\le 5$.

e)Nếu $a>c>0$ và $b>c>0$ thì $\sqrt{c(a-c)}+\sqrt{c(b-c)}\le\sqrt{ab}$.

f)Nếu $4a+9b+16c=49$ thì $\frac{1}{a}+\frac{25}{b}+\frac{64}{c}\ge 49$.

g)Nếu $a+b+c=1$ thì $\sqrt{a+1}+\sqrt{b+1}+\sqrt{c+1}\le 2\sqrt{3}$.

h)Nếu $a+b+c=12$ thì $\sqrt{a+3}+\sqrt{b+2}+\sqrt{c+1}\le 3\sqrt{6}$.

i)Nếu $a+b+c=4$ thì $\sqrt{a+b}+\sqrt{b+c}+\sqrt{c+a}\le 2\sqrt{6}$.

j)Nếu a, b, c là ba số thực thay đổi thỏa $a+b+c=6$ thì $a^2+b^2+c^2\ge 12$.

Bài 5.Chứng minh các bất đẳng thức sau

a)Nếu $a+b\ge 1$ thì $a^2+b^2\ge\frac{1}{2}\cdot$

b)Nếu $a+b\ge 1$ thì $a^3+b^3\ge\frac{1}{4}\cdot$

c)Nếu $a+b\ge 1$ thì $a^4+b^4\ge\frac{1}{8}\cdot$

d)Nếu $a+b=2$ thì $a^4+b^4\ge 2$.

Bài 6.Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau

a) $A=\sqrt{7-x}+\sqrt{2+x}$, với $-2\le x\le 7$.

b) $B=6\sqrt{x-1}+8\sqrt{3-x}$ với $x\in[1;3]$.

c) $C=y-2x+5$ với $36x^2+16y^2=9$.

d) $D=2x-y-2$ với $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$.

e) $E=\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}$.

f) $F=\sqrt{3-x}+\sqrt{x+5}$.

g) $G=2\sqrt{x-4}+\sqrt{8-x}$.

h) $H=5\sqrt{x+1}+3\sqrt{6-x}$.

i) $I=4\sqrt{x+3}+5\sqrt{4-x}$.

j) $J=\sqrt{1-2x}+\sqrt{x+8}$.

Bài 7.Tìm GTLN và GTNN của biểu thức (nếu có)

a)Cho $x, y\in\mathbb{R}$ và $x^2+y^2=5$. Tìm GTLN và GTNN của biểu thức $A=2x+y$.

b)Cho $x, y\in\mathbb{R}$ và $2x^2+3y^2=6$. Tìm GTLN và GTNN của biểu thức $B=4x+2y$.

c)Cho $x, y\in\mathbb{R}$ và $x^2+4y^2=10$. Tìm GTLN và GTNN của biểu thức $C=3x+5y$.

d)Cho $x, y, z\in\mathbb{R}$ và $xy+yz+zx=1$. Tìm GTNN của biểu thức $D=x^4+y^4+z^4$.

e)Cho $x, y\in\mathbb{R}$ và $x^2+y^2=1$. Tìm GTLN của biểu thức $E=x\sqrt{1+y}+y\sqrt{1+x}$.

f)Cho $a\ge 1$. Tìm GTLN của biểu thức $F=\sqrt{a+\sin x}+\sqrt{a+\cos x}$.

g)Cho $x,y>0$ và $x+y=1$. Tìm GTNN của biểu thức $G=\frac{4}{x}+\frac{1}{4y}\cdot$

h)Cho $x,y,z>0$ và $x+y+z=1$. Tìm GTLN của $H=\sqrt{1-x}+\sqrt{1-y}+\sqrt{1-z}$.

i)Cho $x\in[-2;2]$. Tìm GTLN và GTNN của biểu thức $I=x+\sqrt{4-x^2}$.

Bài 8.Cho $x, y, z>0$. Chứng minh: $\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\ge\frac{x+y+z}{2}\cdot$

Bài 9.(Czech and Slovak Match 1999) Cho $a, b, c>0$. Chứng minh: $\frac{a}{b+2c}+\frac{b}{c+2a}+\frac{c}{a+2b}\ge 1$.

Bài 10.Cho $\begin{cases}x>0,\ y>0,\ z>0\\ x+y+z=3\end{cases}\cdot$ Tìm giá trị nhỏ nhất của: $P=\frac{x^3}{x+2y+3z}+\frac{y^3}{y+2z+3x}+\frac{z^3}{z+2x+3y}\cdot$

Bài 11. Cho các số thực dương a, b, c, d. Chứng minh: $\frac{a}{b+c}+\frac{d}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}\ge 2$.

Bài 12.Cho $\begin{cases} a>0,\ b>0,\ c>0 \\ a+b+c=3 \end{cases}\cdot$ Chứng minh: $\dfrac{a}{a+2bc}+\dfrac{b}{b+2ca}+\dfrac{c}{c+2ab}\ge 1.$

Bài 13.Cho $a,\ b,\ c>0.$ Chứng minh: $\dfrac{a^3}{a+2b}+\dfrac{b^3}{b+2c}+\dfrac{c^3}{c+2a}\ge \dfrac{a^2+b^2+c^2}{3}\cdot$

Bài 14.Cho $\begin{cases} x>0,\ y>0,\ z>0 \\ xyz=1 \end{cases}\cdot$ Tìm giá trị nhỏ nhất của: $P=\dfrac{1}{x^3(y+z)}+\dfrac{1}{y^3(z+1)}+\dfrac{1}{z^3(x+y)}\cdot$

Bài 15.Cho $a,\ b,\ c>0.$ Chứng minh: $\dfrac{a^2}{a^2+2bc}+\dfrac{b^2}{b^2+2ca}+\dfrac{c^2}{c^2+2ab}\ge 1.$

Bài 16.Cho $x,\ y,\ z$ là các số thực dương thỏa mãn điều kiện: $x+y+z\ge 6.$ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\dfrac{x^3}{y+z}+\dfrac{y^3}{x+z}+\dfrac{z^3}{x+y}\cdot$

Bài 17.Cho $\begin{cases} x>0,\ y>0,\ z>0 \\ x+y+z=1 \end{cases}\cdot$ Tìm giá trị nhỏ nhất của: $P=\dfrac{x}{x^2+8yz}+\dfrac{y}{y^2+8zx}+\dfrac{z}{z^2+8xy}\cdot$

Bài 18.Cho $x,\ y,\ z>0.$ Tìm giá trị nhỏ nhất của: $P=\dfrac{x^2}{y^2+yz+z^2}+\dfrac{y^2}{z^2+zx+x^2}+\dfrac{z^2}{x^2+xy+y^2}\cdot$

Bài 19.Cho $x,\ y,\ z$ là các số thực dương thỏa mãn điều kiện: $x+y+z=6.$ Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P=\dfrac{1}{x^2+y^2+z^2}+\dfrac{1}{xy}+\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{zx}\cdot$

Bài 20.Cho $x,\ y,\ z$ là các số thực dương thay đổi thỏa mãn điều kiện: $x+y+z=3.$ Hãy chứng minh rằng : $\dfrac{x}{2x^2+yz}+\dfrac{y}{2y^2+zx}+\dfrac{z}{2z^2+xy}\ge xyz.$

……………..HẾT……………